Методы оптимизации Письменная работа № 3 от 16 апреля 2020 г.

Вариант C (Условия задач и их решения)

В гильбертовом пространстве $L^2(0, 2l)$ рассматриваются два линейных подпространства: множество $C[0, 2l]$ **непрерывных на отрезке** $[0, 2l]$ функций и множество $\mathcal{L}$, состоящее из l-периодичных функций:

$$\mathcal{L} = \Big\{ u(x) \in L^2(0, 2l) \;\Big|\; u(x + l) = u(x) \text{ для п.в. } x \in (0, l) \Big\}. \tag{1}$$

1. Объясните, почему множество $C[0, 2l]$ **не является замкнутым** в $L^2(0, 2l)$ и найдите проекцию функции $\sin\frac{1}{x}$ на множество $C[0, 2l]$.

Ответ: проекция функции $\sin\frac{1}{x}$ на множество $C[0, 2l]$ не существует.

Решение. Множество $C[0, 2l]$ непрерывных на отрезке $[0, 2l]$ функций *всюду плотно* в $L^2(0, 2l)$, поэтому для функции $f(x) = \sin\frac{1}{x} \in L^2(0, 2l)$

$$\inf_{u \in C[0,2l]} \|u - f\|_{L^2(0,2l)} = 0, \tag{2}$$

но поскольку $f(x) = \sin\frac{1}{x} \notin C[0, 2l]$, то нижняя грань в (2) не достигается.

2. Объясните, почему множество $\mathcal{L}$ **является замкнутым** в $L^2(0, 2l)$ и найдите проекцию $p(x)$ функции $\sin\frac{1}{x}$ на множество $\mathcal{L}$.

Ответ: $p(x) = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin(x+l)}\big),\ x \in (0, l);\ \ p(x) = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{\sin(x-l)} + \frac{1}{\sin x}\big),\ x \in (l, 2l).$

Решение. Определённое в (1) множество $\mathcal{L}$ является линейным подпространством, значит, оно *выпукло*. Оно также и *замкнуто* в силу того, что, как известно, если функциональная последовательность $u_n(x) \in L^2(0, 2l)$ *сильно сходится* к некоторой функции $u_0(x) \in L^2(0, 2l)$, т. е. $\|u_n - u_0\|_{L^2(0,2l)} \to 0$ при $n \to \infty$, то из неё можно выделить подпоследовательность $u_{n_m}(x)$, сходящуюся при $m \to \infty$ к тому же пределу $u_0(x)$ *почти всюду* на $(0, 2l)$. Тем самым, поточечные условия периодичности $u_{n_m}(x + l) = u_{n_m}(x)$, справедливые для каждого номера $m = 1, 2, \ldots$ и почти всех $x \in (0, l)$, будут выполняться и для предельной функции $u_0(x)$.

В гильбертовом пространстве $L^2(0, 2l)$ у любой функции $f(x)$ из $L^2(0, 2l)$ существует единственная проекция $p(x)$ на выпуклое замкнутое множество $\mathcal{L}$. Для данного конкретного $\mathcal{L}$ с учётом периодичности можно искать значения проекции $p(x)$ только на участке $x \in (0, l)$ из условий

$$p(x) = \operatorname*{arg\,min}_{u(x) \in L^2(0,l)} \left(\int_0^l \big|u(x) - f(x)\big|^2 dx + \int_l^{2l} \big|u(x - l) - f(x)\big|^2 dx \right) =$$

$$= \operatorname*{arg\,min}_{u(x) \in L^2(0,l)} \left(\int_0^l \big|u(x) - f(x)\big|^2 dx + \int_0^l \big|u(x) - f(x + l)\big|^2 dx \right). \tag{3}$$

Задача (3) представляет собой задачу минимизации гладкой и выпуклой функции на всём пространстве $L^2(0,l)$, поэтому критерием оптимальности в ней является условие Ферма́ о равенстве нулю производной, из которого получаем результат:

$$p(x) = \frac{1}{2}\big(f(x)+f(x+l)\big) \ \text{ при } \ x \in (0,l); \quad p(x) = \frac{1}{2}\big(f(x-l)+f(x)\big) \ \text{ при } \ x \in (l,2l).$$

Критерии оценок

Номер задания	1	1+2
Оценка	**3.5**	**5.0**